



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۲/۱۲

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ اردیبهشت ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) A, B و C سه مجموعه دلخواه و غیرتهی هستند، اگر $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ می‌باشد. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>(ب) اگر $a c$ و $b c$ آنگاه $ab c$ و $a, b, c \in \mathbb{Z}$. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>(ج) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ در اعداد صحیح جواب دارد، اگر و تنها اگر $(a, b) m$. $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>(د) اگر $(a, b) = b$ آنگاه $b a$. $a, b \in \mathbb{Z}$. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>	۱
۱/۲۵	<p>برای هر دو عدد حقیقی x و y به روش بازگشتی نشان دهید:</p> $x^2 + y^2 + 1 \geq xy - x - y$	۲
۱	<p>به روش برهان خلف نشان دهید اگر x و y و z سه عدد صحیح و دلخواه باشند، عدد $(x - y)(y - z)(z - x)$ همواره زوج است.</p>	۳
۱/۲۵	<p>$a \in \mathbb{Z}$ و m عدد طبیعی و فرد می‌باشد. اگر $m 7a + 7$ و $m 2a + 3$ مقدار m را محاسبه کنید.</p>	۴
۱	<p>باقیمانده تقسیم $A = 80^{43} + 41$ بر ۲۷ را محاسبه کنید.</p>	۵
۱/۵	<p>معادله $11x \equiv 7 \pmod{1403}$ را حل کنید.</p>	۶
۱	<p>جاهای خالی را با عبارتهای مناسب کامل کنید.</p> <p>(الف) تعداد یال‌های گراف کامل از مرتبه $P = 11$، برابر است.</p> <p>(ب) گرافی که فقط از یک دور به طول n تشکیل شده باشد، گراف نامیده می‌شود.</p> <p>(ج) گرافی که بین هر دو رأس آن حداقل یک باشد، گراف همبند گفته می‌شود.</p> <p>(د) در گراف r-منتظم از مرتبه P، اگر P فرد باشد، حتماً r عدد است.</p>	۷
۲/۵	<p>گراف G با رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و یال‌های $E(G) = \{ab, bc, cd, bf, be, ef, ed\}$ مفروض است.</p> <p>(الف) گراف G را رسم کنید.</p> <p>(ب) مجموع درجات رئوس گراف G را محاسبه کنید.</p> <p>(ج) مجموعه $N_G(a)$ را بنویسید.</p> <p>(د) دوری به طول ۵ در گراف G بنویسید.</p> <p>(ه) حاصل $q(\bar{G}) + \deg_{\bar{G}}(f)$ را به دست آورید.</p>	۸



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۲/۱۲

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ اردیبهشت ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته

بارم	سؤال	ردیف
۲/۵	<p>گراف زیر را در نظر بگیرید: الف) عدد احاطه‌گری گراف را محاسبه کنید. (با ذکر دلیل) ب) یک احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی معرفی کنید. ج) یک احاطه‌گر مینیمم شامل رأس a معرفی کنید.</p>	۹
۱	<p>۵ خانواده ۳ نفره (شامل پدر، مادر و فرزند) در یک مراسم شرکت کرده‌اند. آنها می‌خواهند کنار هم در یک صف بایستند و عکس یادگاری بگیرند. اگر بخواهیم همه اعضای هر خانواده کنار هم باشند و فرزند بین پدر مادر باشد، چند عکس مختلف می‌توان گرفت؟</p>	۱۰
۰/۷۵	<p>با جایگشت ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند کد ۸ رقمی می‌توان ساخت که به رقم ۲ ختم شود؟</p>	۱۱
۱/۵	<p>معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_3 = 2$ و $x_1 \geq 3$ و $x_5 > 1$ دارد؟</p>	۱۲
۱/۵	<p>دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۴ معرفی کنید و متعامد بودن آنها را اثبات کنید.</p>	۱۳
۱/۲۵	<p>در بین اعداد طبیعی از ۱ تا ۴۰۰ ($1 \leq n \leq 400$) چند عدد وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشد؟</p>	۱۴
۱	<p>حداقل افراد شرکت کننده در یک همایش چند نفر باشد تا با اطمینان بتوان گفت ۵ نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده‌اند و باقیمانده تقسیم کدملی آنها بر عدد ۳ یکسان است؟</p>	۱۵
۲۰	جمع بارم	



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) درست

(ج) نادرست

(ب) درست

(الف) نادرست

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۳، ۱۰، ۱۳ و ۲۵)

پاسخ سؤال ۲: (۲۵/۱ نمره)

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy - x - y \Leftrightarrow x^2 - 2xy + 2y^2 + 2 \geq 2xy - 2x - 2y \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 1 + 1 - 2xy + 2x + 2y \geq 0 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y+1)^2 + (x+1)^2 \geq 0 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

چون تمام مراحل برگشت پذیر است، پس حکم اثبات شد. (نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۸)

پاسخ سؤال ۳: (۱ نمره)

برهان خلف: فرض کنید $(x-y)(y-z)(z-x)$ (نمره ۰/۲۵) فرد باشد، پس $x-y$ ، $y-z$ و $z-x$ (نمره ۰/۲۵) هر سه فرد هستند، پس جمع آنها نیز فرد است. (نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow x - y + y - z + z - x \Rightarrow \text{صفر عدد فرد است} \Rightarrow \text{نادرست} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

چون به تناقض رسیدیم، پس اثبات به کمک برهان خلف تمام است.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۶)

پاسخ سؤال ۴: (۲۵/۱ نمره)

$$\begin{cases} m \mid 8a + 7 \Rightarrow m \mid 8a + 7 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \\ \text{و} \\ m \mid 2a + 3 \xrightarrow{-4} m \mid 8a + 12 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} m \mid 12 - 7 \Rightarrow m \mid 5 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } 5 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۲)

پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

$$8 \equiv -1 \pmod{27} \xrightarrow{\text{توان } ۴۳} 8^{۴۳} \equiv -1 \pmod{27} \xrightarrow{+41} 8^{۴۳} + 41 \equiv 40 \equiv 13 \pmod{27} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

پس باقیمانده $r = 13$ (نمره ۰/۲۵) می باشد.

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۲۲ و ۲۳)

پاسخ سؤال ۶: (۵/۱ نمره)

$$1403x \equiv 11 \pmod{27} \Rightarrow 3x \equiv -3 \pmod{27} \xrightarrow{+3} x \equiv -1 \pmod{27} \Rightarrow x = 27q - 1, q \in \mathbb{Z} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

می دانیم $1403 \equiv 3 \pmod{27}$ (نمره ۰/۲۵) و $11 \equiv -3 \pmod{27}$ (نمره ۰/۲۵) می باشد، پس داریم:

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۵)

پاسخ سؤال ۷: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) زوج

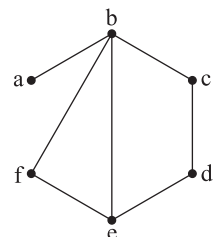
(ج) مسیر

(ب) C_n

$$\binom{11}{2} = 55 \quad (\text{الف})$$

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۳۲ و ۴۲)

پاسخ سؤال ۸: (۲۵/۲ نمره)



(نمره ۰/۵)

(الف)

$$N_G(a) = \{b\} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ه)

$$\text{ب) } (۰/۲۵) \text{ نمره } = 1 + 4 + 2 + 2 + 3 + 2 = 14 \text{ مجموع درجات}$$

(د) دور به طول ۵: bcdfeb (نمره ۰/۵)

$$q(G) + q(\bar{G}) = \binom{P}{2} = \binom{6}{2} = 15 \xrightarrow{q(G)=7} q(\bar{G}) = 8 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\text{deg}_G(f) + \text{deg}_{\bar{G}}(f) = P - 1 = 5 \xrightarrow{\text{deg}_G(f)=2} \text{deg}_{\bar{G}}(f) = 3 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\Rightarrow q(\bar{G}) + \text{deg}_{\bar{G}}(f) = 8 + 3 = 11$$

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۳۲ و ۴۲)

